

<http://htkz.cn>

引用格式: 张飞, 蔡兰波, 张国军. 一种基于 Chebyshev 正交域变换的高轨道航天器定位方法[J]. 航天控制, 2025, 43(4): 86-92. (ZHANG Fei, CAI Lanbo, ZHANG Guojun. A high-orbit spacecraft positioning method based on Chebyshev orthogonal domain transformation[J]. Aerospace Control, 2025, 43(4): 86-92.)

# 一种基于 Chebyshev 正交域变换的高轨道航天器定位方法

张 飞<sup>1</sup>, 蔡兰波<sup>2</sup>, 张国军<sup>1</sup>

1. 中国科学院微电子研究所, 北京 100029

2. 广东省新时空位置网创新研究院, 广州 510535

**摘 要** 本文提出了一种基于 Chebyshev 正交域变换的高轨道航天器定位方法, 该方法通过 Chebyshev 正交域变换, 将一段时间内时变的接收机坐标, 变换到不变的 Chebyshev 系数域中, 从而将航天器观测得到的、不同历元间的稀疏测距信息有效结合, 实现对多历元观测量的联合解算。在可见卫星稀疏的情况下, 该方法可借助历史观测信息为当前历元的定位提供有效约束, 实现对中高轨道航天器连续且可靠的定位。此外, 基于 Chebyshev 正交域变换的定位方法可以有效处理观测过程中出现的随机误差, 在一定程度上提高 GNSS 定位的精度; 经过实验和仿真模拟可得, 该方法对于随机噪声的处理优于扩展卡尔曼滤波, 在计算速度和定位精度方面均优于传统的最小二乘法, 可以在高轨环境下实现对航天器伪距级的连续定位。

**关键词** 高轨环境; 稀疏测距信息; GNSS 定位; 正交域变换

中图分类号: V19

文献标识码: A

文章编号: 1006-3242(2025)04-0086-07

## A high-orbit spacecraft positioning method based on Chebyshev orthogonal domain transformation

ZHANG Fei<sup>1</sup>, CAI Lanbo<sup>2</sup>, ZHANG Guojun<sup>1</sup>

1. Institute of Microelectronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China

2. Guangdong Innovation Institute of Spatiotemporal Information Network, Guangzhou 510535, China

**Abstract** A positioning method is proposed for high Earth orbit (HEO) spacecraft based on Chebyshev orthogonal domain transformation. By transforming the time-varying receiver coordinates over a period into an invariant Chebyshev coefficient domain, this approach is based on effective combination with sparse ranging observations obtained by the spacecraft across different epochs, which enables joint resolution of multi-epoch measurements. Under conditions of sparse satellite visibility, the historical observation data is leveraged to provide effective constraints for positioning on the current epoch and achieve con-

收稿日期: 2025-04-03

作者简介: 张 飞(2001-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为卫星导航定位解算; 蔡兰波(1961-), 男, 硕士, 研究员, 主要研究方向为卫星导航, 本文通信作者。

tinuous and reliable positioning for medium-high Earth orbit (MHEO) spacecraft. Furthermore, the Chebyshev based positioning method demonstrates robustness against random measurement errors during observation, which enhances GNSS positioning precision in high-altitude environments. The experimental and simulation results demonstrate that the method is superior to the Extended Kalman Filter (EKF) by handling random noise and surpasses traditional least squares algorithms in both computational speed and positioning precision, which is capable of continuous positioning for spacecraft by pseudorange-level in high Earth orbit scenarios.

**Key words** High earth orbit; Sparse ranging information; GNSS positioning; Orthogonal domain transformation

## 0 引 言

随着航天技术的发展,人类在太空的探索任务数量也一直在逐年递增,据估计,未来十几年近一半的太空探索任务将会发生在中高轨道,地月转移轨道以及星际轨道中,因此,包括中国探月工程在内的诸多太空探测任务对实现中高轨道航天器的高效定位提出了迫切需求。

目前,传统的中高轨道卫星定轨采用的是地基跟踪系统的不断观测,精度有限,成本高昂,且我国还未实现全球覆盖的地面站,以上缺点使得更多学者将研究目标聚焦在天基定位上。而在近几十年,现代计算机、微处理器及原子钟等相关领域内学科的迅速发展带来了全球卫星导航系统(GNSS)的迅速发展。目前,GNSS系统已经凭借其全天候、高精度、高效率及低成本等特点广泛应用于大地测量、灾害预警和精密授时等领域,因此,利用GNSS系统的导航资源对中高轨道航天器进行连续定位将具有非常重要的实践意义<sup>[1]</sup>。

由于GNSS系统的设计之初是实现对地面用户的PNT服务,并未考虑高轨环境下的定位情况,因此,将该系统应用于中高轨道航天器的定位将会存在以下几个问题:

### 1) 可视卫星数目少

如图1所示,GNSS卫星的发射天线对准地面,由于航天器和GNSS星座的角度关系,低轨航天器尚能接收到GNSS卫星的主瓣信号,但在航天器的轨道高度超过GNSS卫星所在的轨道时,接收机仅能接收地球另一侧导航卫星发射的未被遮挡的下行导航信号,对于GPS来说,这部分信号为旁瓣信号或发射角在 $13.8^{\circ} \sim 21.3^{\circ}$ 的主瓣信号,信号范围窄,导致高轨道航天器的可视卫星数目稀少<sup>[2]</sup>。

### 2) 信号能量小

GPS L1频段发射的信号在到达地面时的功率为 $-160 \sim -153$  dbw,而中高轨环境下航天器仅能接收地球另一侧卫星发射的漏信号,传播路径远,信号衰减严重,接收到的信号大部分为下行天线的旁瓣辐射,此时的信号功率在 $-185 \sim -174$  dbw之间,信号非常微弱,难以捕获<sup>[3]</sup>。

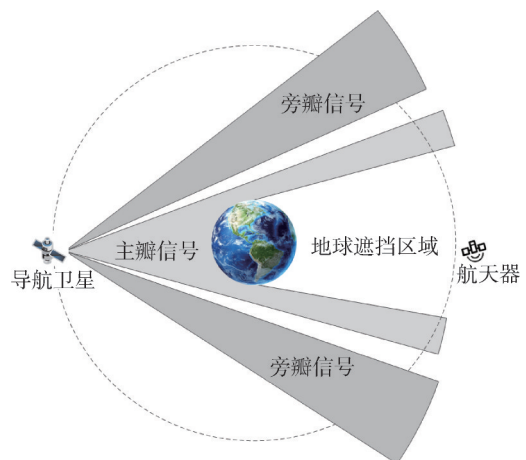


图1 高轨、低轨卫星接收信号的差异

### 3) 高动态

GNSS卫星和航天器在太空均处于高速运动状态,二者相对运动产生的多普勒频移的变化范围以及多普勒变化率也远大于地面接收的信号,接收机捕获跟踪的难度将进一步增加<sup>[4]</sup>。

此外,影响GNSS卫星对中高轨航天器定位的原因还有星座布局和远近效应等<sup>[5]</sup>。由于以上原因,使得GNSS系统在对中高轨道的航天器进行定位时,会出现信号被概率接收的情况,测距信息稀疏,导致接收机无法获得连续且可靠的定位结果。

理论上,通过成倍地增强GNSS导航信号的主瓣宽度,或者增加导航信号发射功率的办法,便可以解决上述问题,但这无疑需要一笔庞大的工程费

用。除了GNSS的导航信号,星间链路信号具有更高的测距精度和通信性能,但由于星间链路信号的设计采用的时分多址技术,是一种类似“脉冲”的信号<sup>[6]</sup>。因此,在利用导航信号或星间链路信号对中轨道航天器进行定位时,会出现可跟踪卫星数目少及测距信息稀疏的情况,导致接收机无法进行连续定位甚至无法定位。

基于此,本文提出了一种基于正交域变换的定位方法,通过Chebyshev正交变换,将一段时间内观测方程中时变的航天器坐标变换到时不变的Chebyshev系数域中,由此建立了关于卫星定位的Chebyshev参数模型,通过该模型,可以充分利用高轨环境下导航信号或星间链路信号的稀疏测距信息,有效处理掉传统GNSS定位过程中的随机噪声,实现对航天器高效、连续且可靠的定位。

## 1 基于正交域变换的参数模型的建立

由于Chebyshev多项式计算简单,拟合效果好,在轨道拟合,精密星历插值等领域应用非常广泛<sup>[7]</sup>,因此,本文拟采用Chebyshev正交多项式对接收机坐标进行正交域变换,建立卫星定位的节省参数模型。具体实现过程如下<sup>[8]</sup>:

第1步:在 $t \in [t_0, t_0 + \delta t]$ 的时间间隔内计算 $N$ 阶Chebyshev多项式系数,首先将变量 $t \in [t_0, t_0 + \delta t]$ 变为 $\tau \in [-1, +1]$ ,即

$$\tau = \frac{2}{\delta t} (t - t_0) - 1, \quad t \in [t_0, t_0 + \delta t] \quad (1)$$

第2步:对接收机坐标进行正交变换,接收机坐标 $x, y, z$ 对应的拟合多项式为

$$\begin{cases} x_u(t) = \sum_{i=0}^N C_{xi} T_i(\tau) \\ y_u(t) = \sum_{i=0}^N C_{yi} T_i(\tau) \\ z_u(t) = \sum_{i=0}^N C_{zi} T_i(\tau) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $N$ 为多项式的阶数, $C_{xi}, C_{yi}, C_{zi}$ 分别为接收机坐标 $x, y, z$ 的分量所对应的Chebyshev多项式系数, $T_i$ 为切比雪夫多项式。此外,在Chebyshev多项式中,利用递推公式确定 $T_i$ <sup>[9]</sup>为

$$\begin{cases} T_0(\tau) = 1 \\ T_1(\tau) = \tau \\ T_n(\tau) = 2\tau T_{n-1}(\tau) - T_{n-2}(\tau) \end{cases} \quad (3)$$

第3步:将变换后的接收机坐标应用在星间差分后的观测方程中<sup>[10]</sup>,即建立了基于正交域变换的单点定位节省参数模型。参数化后的方程组为

$$\Delta p_{m-1,m} = r_{m-1}(t_k) - r_m(t_k) \quad (4)$$

式中:

$$\begin{cases} r_{m-1}(t_k) = |X_s(t_k) - X_u(t_k)| \\ X_s(t_k) = [x_s(t_k), y_s(t_k), z_s(t_k)] \\ X_u(t_k) = [x_u(t_k), y_u(t_k), z_u(t_k)] \end{cases} \quad (5)$$

式中: $X_s(t_k)$ 表示卫星在 $t_k$ 时刻的坐标, $X_u(t_k)$ 表示接收机在 $t_k$ 时刻的坐标,通过式(6)即可完成对接收机坐标的正交变换。

$$\begin{cases} x_u(t_k) = \sum_{i=0}^N C_{xi} T_i(\tau_k) \\ y_u(t_k) = \sum_{i=0}^N C_{yi} T_i(\tau_k) \\ z_u(t_k) = \sum_{i=0}^N C_{zi} T_i(\tau_k) \end{cases} \quad (6)$$

## 2 模型求解

上述的节省参数模型虽然对原观测方程进行了较大变动,但解算算法依然可以采用最小二乘法进行求解<sup>[11]</sup>,解算方法如下:

第1步:准备数据和设置初始解。

RINEX的观测值文件中含有接收机当前位置的估计值,单点定位通常会把这个估计值作为接收机状态的初始值;在利用节省参数模型进行静态定位时,正交变换的系数会出现 $C_{x0}, C_{y0}, C_{z0}$ 和接收机坐标相似的情况,因此,可以把接收机状态初始值赋给Chebyshev正交多项式的第1个系数,其余系数设为0即可,如下:

$$\begin{cases} C_{xi} = \begin{cases} x_0, & i = 0 \\ 0, & i = 1, \dots, n \end{cases} \\ C_{yi} = \begin{cases} y_0, & i = 0 \\ 0, & i = 1, \dots, n \end{cases} \\ C_{zi} = \begin{cases} z_0, & i = 0 \\ 0, & i = 1, \dots, n \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

式中: $x_0, y_0, z_0$ 为接收机初始状态,一般为RINEX的观测值文件中的接收机坐标初始估计值。

第2步:非线性方程组线性化。

伪距单点定位的最小二乘法是将观测方程组分别对3个坐标分量求偏导数来实现对非线性方程组的线性化,这里在对坐标分量进行正交变换后,

仅需要在 3 个坐标分量求偏导数的基础上再对坐标分量计算正交变换系数的偏导数即可。

令

$$f(C_{x0}, C_{x1}, \dots, C_{zn}) = r_{m-1} - r_m \quad (8)$$

线性化后的方程组如下:

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} \Delta C_{x0} \\ \vdots \\ \Delta C_{xn} \\ \Delta C_{y0} \\ \vdots \\ \Delta C_{yn} \\ \Delta C_{z0} \\ \vdots \\ \Delta C_{zn} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad (9)$$

式中:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial C_{x0}}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial C_{xn}}, \frac{\partial f_1}{\partial C_{y0}}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial C_{yn}}, \frac{\partial f_1}{\partial C_{z0}}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial C_{zn}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial C_{x0}}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial C_{xn}}, \frac{\partial f_2}{\partial C_{y0}}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial C_{yn}}, \frac{\partial f_2}{\partial C_{z0}}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial C_{zn}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial C_{x0}}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial C_{xn}}, \frac{\partial f_k}{\partial C_{y0}}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial C_{yn}}, \frac{\partial f_k}{\partial C_{z0}}, \dots, \frac{\partial f_k}{\partial C_{zn}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \Delta p_1 - f_1(C_{x0}, C_{x1}, \dots, C_{zn}) \\ \Delta p_2 - f_2(C_{x0}, C_{x1}, \dots, C_{zn}) \\ \vdots \\ \Delta p_k - f_k(C_{x0}, C_{x1}, \dots, C_{zn}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中:  $\mathbf{G}$  为雅可比矩阵,在对非线性方程组线性化后便可利用矩阵理论进行求解。

第 3 步:求解线性方程组。

求解 GNSS 单点定位的线性矩阵方程式,只需要套用最小二乘求解公式即可。

$$\begin{bmatrix} \Delta C_{x0} \\ \vdots \\ \Delta C_{xn} \\ \Delta C_{y0} \\ \vdots \\ \Delta C_{yn} \\ \Delta C_{z0} \\ \vdots \\ \Delta C_{zn} \end{bmatrix} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{b} \quad (12)$$

第 4 步:更新非线性方程组的根并判断牛顿迭代的收敛性。

根据上式可以获得 Chebyshev 多项式系数的校正正值,可对系数进行校正,如式(13),  $m$  为迭代次数。

$$\begin{bmatrix} C_x^{m+1} \\ C_y^{m+1} \\ C_z^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x^m \\ C_y^m \\ C_z^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta C_x \\ \Delta C_y \\ \Delta C_z \end{bmatrix} \quad (13)$$

判断系数校正值是否满足牛顿迭代预先设定好的门限,如果满足,更新后的根即为计算结果;否则继续进行迭代。

### 3 导航卫星信号的单点定位实例分析

使用香港交椅洲观测站的原始 GPS 观测量,其中,该观测点的采样率为 1 Hz,在用于计算的 240 s 的观测时长内,接收机能够稳定地追踪 9 颗 GPS 卫星,图 2 为 9 颗卫星的天空视图。

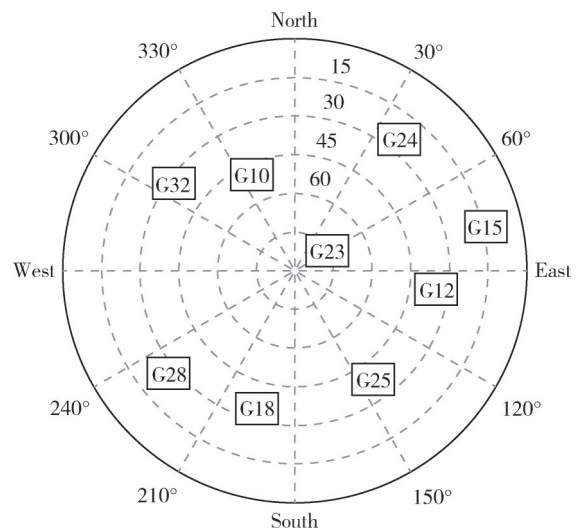


图 2 观测站的可视卫星分布图

对于观测方程的求解,初始状态均设为对准确位置加上 2 km 的偏置,收敛条件设为校正量的二范数小于  $10^{-4}$ ,下面分别对最小二乘法(LS)、扩展卡尔曼滤波(EKF)<sup>[12-13]</sup>和正交域变换 3 种解算方法的定位结果作对比。

对于正交域变换,不同的多项式阶数会带来不同的计算结果,由于是静态定位且定位时间段较短,用低阶的 Chebyshev 进行正交变换足够满足需求,这里采用三阶的 Chebyshev 多项式,在模型修正或差分去除原始观测量的误差后,定位结果如图 3。

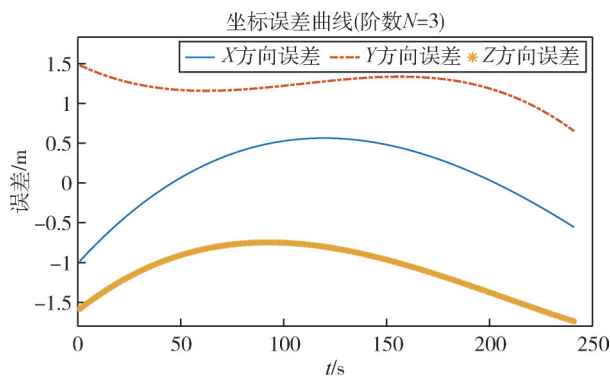


图3 正交域变换定位结果

其中,240 s内,采样点的 $x,y,z$ 方向的误差分别达到了0.762 m、1.110 m和1.200 m,三维的RMSE为1.768 m。

将计算所得的结果与EKF和最小二乘法作对比,其中,EKF取计算收敛后的平均RMSE,最小二乘取240个采样点的平均RMSE,此处不对这两种定位解算方法做详细介绍,3个坐标方向的误差及均方根误差的计算结果如表1。

表1 3种算法定位误差比较 [m]

	Error-x	Error-y	Error-z	Error-3D
Chebyshev	0.762	1.110	1.200	1.800
EKF	0.599	1.46	1.214	1.991
LS	0.648	1.252	1.324	2.199

其中,由于是静态定位,状态转移矩阵设单位阵即可,EKF的测量噪声 $Q$ 和观测噪声 $R$ 如下式所示<sup>[14-15]</sup>:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$Q = 10^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

由表1可知,正交域变换的方法对随机噪声的处理优于EKF和LS,三维空间定位精度较最小二乘法提高了0.4 m,在计算速度方面优于最小二乘法。随着观测时间的增加,随机噪声被抑制,精度会持续增加并趋近一个极限值,当采样时间为500 s时, $x,y,z$ 方向定位误差为0.156 m、0.689 m、1.154 m,空间误差稳定在1.353 m。

## 4 基于正交域变换的航天器定位仿真分析

在GNSS定位中,观测方程组具有接收机坐标和钟差4个自由度,观测卫星数对应观测方程组的限制条件数,当观测卫星少于4颗时,接收机将无法进行定位。通过Chebyshev参数模型,将接收机坐标参数化,自由度的数目变为Chebyshev系数的数目,限制条件数变为一段时间内观测量的数目,航天器时变的坐标变换到不变的Chebyshev系数中。理论上通过该模型,可以将时间区间内不同历元间的观测量联合起来,在仅需要保证时间区间内拥有4颗卫星的观测量时,即可实现高轨环境下航天器高效、连续的定位。

### 4.1 稀疏特性仿真

对于接收机来说,在利用导航信号或星间链路信号对中高轨道航天器定位时,位置解算方面的主要问题在于可跟踪卫星数目和测距信息的稀疏性,基于此,为模拟中高轨环境下导航信号的稀疏性,本文做以下处理:

1)中高轨航天器模拟:根据导航电文数据计算各个卫星的运动轨迹,以某一颗参考卫星的运动轨迹作为航天器的运动轨迹,其余卫星作为定位卫星。

2)伪距仿真:根据其他卫星与参考卫星的几何距离,通过添加随机噪声和接收机钟差的方式进行伪距仿真。其中,观测频率设为10 Hz,噪声均值设为0,方差设为10 m的高斯白噪声,钟差设为2 km。

3)设置拟合时间区间长度:每秒设置为1个时间节点,6 s设置为1个时间区间,每3 s实现1次定位。即第1次定位利用0~3 s的观测时间,第2次定位利用0~6 s的观测时间,第3次定位利用3~9 s的观测量,以此类推。

4)设置可见性遮挡:将每个时间区间内星载接收机捕获跟踪GNSS卫星信号的概率设为随机分布,其中,接收概率设为 $\alpha=0.3$ 。

根据上述的处理方法,采用章节3的导航电文数据,将GPS32号卫星设为参考卫星,选取GPS10、GPS12、GPS18和GPS23这4颗卫星作为定位卫星,卫星分布如图4。

### 4.2 航天器定位仿真

由第3节可知,在进行静态定位时,通过正交域

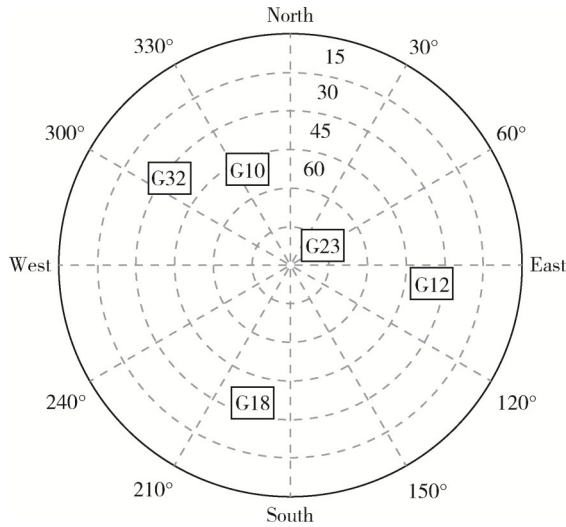


图4 参考卫星与定位卫星分布

变换的方法可以有效抑制随机噪声。主要影响定位精度的因素是可观测卫星数少、卫星几何精度因子差,长时间内的可视卫星观测量少于4颗,则接收机无法定位,对于此类情况,可以通过 Chebyshev 参数模型,动态调整拟合时间区间的方式进行定位,即通过延长时间区间的方式保证每个时间区间内拥有来自4颗不同卫星的观测量,在时间区间长度变化不大的情况下,Chebyshev 阶数无需变化。

通过动态调整时间区间的方法,计算结果如下:

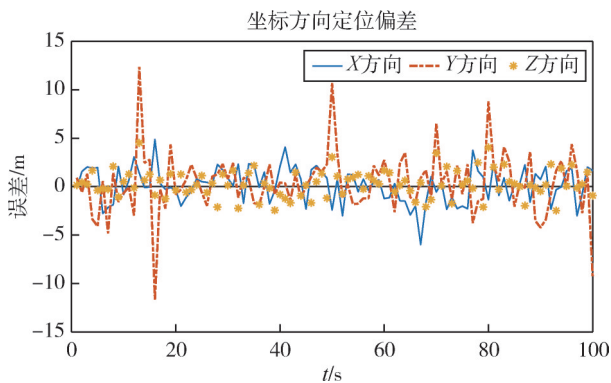


图5 稀疏测距信息定位误差

如上图所示,经过动态调整时间区间后的定位误差普遍在10 m以内。这是由于调整的时间区间长度增加,卫星观测量的增加使得算法对 Chebyshev 系数的约束性得到了增强,随机噪声被抑制,联合历史观测量,实现了对航天器高效且连续的定位。

由于本实例是模拟导航信号或星间链路信号的稀疏测距信息,并未考虑系统误差的影响,因此,

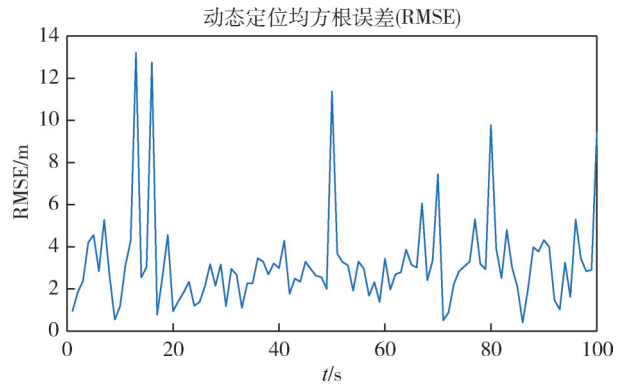


图6 稀疏测距信息定位均方根误差

这里的仿真精度仅作为参考,主要展示的是高轨环境下利用GNSS卫星的稀疏测距信息实现对航天器连续定位的有效方案。

## 5 结 论

对于GNSS定位,首先对原始观测量进行模型修正或差分去除,再通过本文所提出的基于正交域变换的定位解算算法对观测方程组进行变换求解,将最终定位结果与最小二乘法、扩展卡尔曼滤波进行比较。结果发现,该算法在定位精度方面优于扩展卡尔曼滤波和传统最小二乘迭代,较传统最小二乘迭代的定位精度提升了0.4 m左右。本质上,该算法是以牺牲一定的实时性为代价,换取对随机噪声更加有效的处理,这一缺点会随着接收机原始观测频率的增加逐步得到改善。

对于中高轨道航天器的定位,本文分析处理导航电文数据后,根据高轨环境下航天器和导航信号的特性,利用一颗GNSS参考卫星的运动轨迹模拟航天器的运动轨迹,利用其余GNSS卫星与参考卫星的几何距离模拟仿真导航信号或星间链路信号的测距信息,最后使用正交域变换算法进行定位求解。经计算,该算法能够有效解决时分体制下可跟踪卫星数目稀少、测距信息稀疏导致传统定位算法无法收敛、接收机无法定位的问题,实现了中高轨道环境下对航天器高效连续的定位,为以后利用GNSS系统对高轨环境下的探索任务研究提供了技术参考。

## 参 考 文 献

[1] 刘伟杰,陈斌,杨扬. 一种GEO轨道导航卫星位置保持期间自主导航方法[J]. 航天控制,2022,40(2): 54-

59. (LIU Weijie, CHEN Bin, YANG Yang. An autonomous navigation method for GEO orbital navigation satellite during station keeping[J]. *Aerospace Control*, 2022, 40(2): 54-59. )
- [ 2 ] 武威. 基于星载GNSS的地月空间航天器精密定轨关键技术研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2023. (WU Wei. Research on key technologies of precise orbit determination for cis-lunar spacecraft based on onboard GNSS [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2023. )
- [ 3 ] 赵彦珍. 基于GNSS的高轨卫星定位技术研究[D]. 北京: 中国科学院国家空间科学中心, 2016. (ZHAO Yanzhen. Research on GNSS-based positioning technology for high earth orbit satellites [D]. Beijing: National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, 2016. )
- [ 4 ] GAO Y, HAN M F, LIU Z J, et al. GNSS signal acquisition method on the high earth orbits spacecraft [C]// 4th International Conference on Systems and Informatics (ICSAI). Hangzhou, China, 2017: 1087-1092. Doi: 10.1109/ICSAI.2017.824844.
- [ 5 ] 陈雷. 高轨飞行器GNSS定位技术研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2016. (CHEN Lei. Research on GNSS positioning technology for high orbit spacecraft [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2016. )
- [ 6 ] 周一帆. 基于北斗星间链路的用户航天器自主定轨关键技术研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2020. (ZHOU Yifan. Research on key technologies of autonomous orbit determination for user spacecraft based on beidou inter-satellite links [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2020. )
- [ 7 ] 莫相龙, 冉志红, 尤忠义, 等. 基于Chebyshev正交多项式的曲线连续梁桥空间振型拟合研究[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2021, 52(6): 624-633. (MO Xianglong, RAN Zhihong, YOU Zhongyi, et al. Research on spatial mode fitting of curved continuous girder bridges based on chebyshev orthogonal polynomials[J]. *Journal of Inner Mongolia University (Natural Science Edition)*, 2021, 52(6): 624-633. )
- [ 8 ] 王正明. 弹道跟踪数据的校准与评估[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1999. (WANG Zhengming. Calibration and evaluation of ballistic tracking data [M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1999. )
- [ 9 ] 高彦伟. Chebyshev多项式的一些推广[D]. 南京: 南京财经大学, 2024. (GAO Yanwei. Some extensions of chebyshev polynomials [D]. Nanjing: Nanjing University of Finance and Economics, 2024. )
- [ 10 ] 谢钢. GPS原理与接收机设计[M]. 北京: 电子工业出版社, 2017. (XIE Gang. Principle and design of GPS receiver [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2017. )
- [ 11 ] 鲁郁. 北斗/GPS双模软件接收机原理与实现技术[M]. 北京: 电子工业出版社, 2016. (LU Yu. Principle and implementation technology of beidou/GPS dual-mode software receiver [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2016. )
- [ 12 ] 梁巨平, 孟其琛, 黄京梅, 等. 基于EKF/PI滤波的小推力轨控期间自主导航算法[J]. 航天控制, 2024, 42(3): 42-47. (LIANG Juping, MENG Qichen, HUANG Jingmei, et al. Autonomous navigation algorithm during continuous low thrust orbit control based on EKF and PI filter[J]. *Aerospace Control*, 2024, 42(3): 42-47. )
- [ 13 ] HUANG J H, YANG R, ZHAN X Q. Constraint navigation filter for space vehicle autonomous positioning with deficient GNSS measurements [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2022, 120: 107291. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.107291>. (ISSN 1270-9638).
- [ 14 ] KHALIFE J, NEINAVAIE M, KASSAS Z M. The first carrier phase tracking and positioning results with starlink LEO satellite signals [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, 58(2): 1487-1491.
- [ 15 ] 左松林, 陈伟, 付真斌, 等. 基于EKF算法的分布式光伏发电异常数据排查技术[J]. 电力工程技术, 2020, 39(5): 120-125. (ZUO Songlin, CHEN Wei, FU Zhenbin, et al. Abnormal data detection technology for distributed photovoltaic power generation based on EKF algorithm [J]. *Electric Power Engineering Technology*, 2020, 39(5): 120-125. )