

基于序列凸优化的带动力飞行器再入轨迹优化

彭中新, 祁振强, 李永远

中国运载火箭技术研究院, 北京 100076



摘 要 对序列凸优化方法在带动力飞行器再入轨迹优化中的应用进行了研究。首先, 针对原始优化问题中控制量高度耦合且非线性的问题, 通过引入新的控制量并建立与原始控制量的映射关系, 得到关于控制量为线性的状态方程。其次, 对原始优化问题中的非线性动力学方程、性能指标、过程约束与控制量约束进行松弛和线性化处理, 通过附加状态变量的信赖域约束, 并在性能指标中加入速度方位角的积分项以保证松弛和线性化的合理性。进一步, 通过离散技术, 将原始问题转化为一个凸优化问题。最后, 通过数值仿真进行了算法验证。结果表明, 本文算法对于带动力再入轨迹优化问题具有较高的求解精度, 序列凸优化求解结果满足原始非线性约束, 在一定精度范围内优化解可以作为原始问题的可行解。

关键词 飞行器再入; 轨迹优化; 序列凸优化; 带动力再入; 松弛与线性化

中图分类号: V412 **文献标识码:** A

文章编号: 1006-3242(2024)01-0043-08

Powered Vehicle Entry Trajectory Optimization Based on Sequential Convex Optimization

PENG Zhongxin, QI Zhenqiang, LI Yongyuan

China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China

Abstract The sequential convex optimization method applied to the powered vehicle entry trajectory optimization is researched in this paper. Firstly, in order to solve the problem of high coupling and non-linearity of control variables in the original optimization, the linear state equation about control variables is obtained by choosing new control variables due to the relationship between original and new control variables established. Secondly, the nonlinear dynamic equations, performance index and constraints on the path and control variables in the original optimization occurrence are relaxed and linearized. Next, aiming at ensuring the validity of relaxation and linearization, the trust-region constraint is applied to the state variables, and the integral term of velocity azimuth is added to the performance index. Furthermore, the original problem is converted to a convex optimization problem with discretization technique. Finally, the algorithm is proven to be effective by numerical simulation. Under the original nonlinear constraints satisfied, the proposed algorithm is proven to be reasonable with high solving accuracy for the powered vehicle entry trajectory optimi-

收稿日期: 2023-10-23

作者简介: 彭中新(1998 -), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为飞行器导航、制导与控制, 本文通信作者, E-mail: pzx0430@163.com; 祁振强(1973 -), 男, 博士, 研究员, 主要研究方向为飞行器导航、制导与控制; 李永远(1981 -), 男, 博士, 高级工程师, 主要研究方向为飞行器导航、制导与控制。

zation, and the optimized solution can be used as a feasible approach to the original problem in the range of defined precision.

Key words Vehicle entry; Trajectory optimization; Sequential convex optimization; Powered entry; Relaxation and linearization

0 引 言

相比于无动力再入,飞行器带动力再入可以提高机动能力和任务的灵活性。而对于带动力飞行器的再入轨迹优化问题,由于发动机推力的存在,问题更加复杂,求解的难度更大。文献[1]采用改进的高斯伪谱法,考虑发动机不连续开机的情况,给定开机时刻,对轨迹进行分段优化;文献[2]针对跳跃式弹道,采用在弹道极高点、极低点补能的策略,研究了发动机补能对飞行轨迹的影响;文献[3]将混沌粒子群算法应用于跳跃式弹道极低点补能的轨迹优化研究;文献[4]综合考虑了发动机总体参数和带动力轨迹优化问题,提出了一种参/轨综合优化算法;文献[5]对再入过程状态量设置发动机开机条件,进行分段轨迹优化。上述研究在进行带动力飞行器再入轨迹优化时,多采用脉冲推力模型,发动机开机的时机为给定的开机时刻,或处于跳跃式弹道的极高点、极低点,或是采用状态量及其变化率到达某一范围的策略进行开机判断,而对于发动机开机时机或连续变化推力优化的研究较少。

近年来,基于内点法的凸优化方法在行星着陆、轨道转移及大气层内飞行等轨迹优化问题中得到了广泛的应用^[6-8]。相比于传统方法,凸优化方法有着更高的求解效率^[9-10]。局部极小值等于全局最小值是求解凸优化问题的一大优势,但凸优化方法对优化问题有着严苛的要求,即性能指标函数和不等式约束函数都是凸的,等式约束函数是仿射的,而高度非线性的再入轨迹优化问题并不满足上述要求。因此,如何将原始问题转化为凸优化问题,是凸优化方法在再入轨迹优化问题中应用的一大难点。文献[9]以负能量为自变量,在序列凸化算法中嵌入指令反解,将凸优化方法应用于飞行器再入三维轨迹规划;文献[11]提出了一种处理约束的松弛和线性化方法,将非凸的轨迹优化问题转化为二阶锥规划问题进行求解;文献[12]将凸优化方法应用于航天飞机的再入制导,采用控制量的松弛

技术缓解高频“抖振”问题。上述研究考虑无动力再入轨迹优化问题,将原始问题转化为凸优化问题进行求解,而带动力再入轨迹优化问题的凸优化求解方法还有待研究。本文基于序列凸优化方法,通过理论近似与数值仿真,开展带动力飞行器的再入轨迹优化研究。

1 问题描述

1.1 带动力再入运动学模型与约束

考虑地球自转,以时间为自变量,建立带动力飞行器的无量纲三自由度再入运动学方程如式(1)

$$\begin{cases} \dot{r} = V \sin \gamma \\ \dot{\theta} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r \cos \phi} \\ \dot{\phi} = \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{r} \\ \dot{V} = \frac{T \cos \alpha - D}{m} - \frac{\sin \gamma}{r^2} + \Omega^2 r \cos \phi (\sin \gamma \cos \phi - \cos \gamma \sin \phi \cos \psi) \\ \dot{\gamma} = \frac{(L + T \sin \alpha) \cos \sigma}{m V} + \frac{(r V^2 - 1) \cos \gamma}{r^2 V} + \\ 2 \Omega \cos \phi \sin \psi + \frac{\Omega^2 r \cos \phi (\cos \gamma \cos \phi + \sin \gamma \sin \phi \cos \psi)}{V} \\ \dot{\psi} = \frac{(L + T \sin \alpha) \sin \sigma}{m V \cos \gamma} + \frac{V \cos \gamma \sin \psi \tan \phi}{r} - \\ 2 \Omega (\tan \gamma \cos \psi \cos \phi - \sin \phi) + \frac{\Omega^2 r \sin \phi \cos \phi \sin \psi}{V \cos \gamma} \\ \dot{m} = - \frac{T}{I_{sp}} \end{cases} \quad (1)$$

式中: r 为地心距,其无量纲化参数为地球平均半径 R_0 ; θ 和 ϕ 分别为经度和纬度; V 为速度,其无量纲化参数为 $\sqrt{g_0 R_0}$, g_0 为 R_0 处的引力; γ 和 ψ 分别为当地速度倾角和速度方位角; m 为飞行器质量,其无量纲化参数为初始质量 m_0 ; L 和 D 分别为升力加速度和阻力加速度

$$L = 0.5 R_0 \rho V^2 S_{\text{ref}} C_L / m_0 \quad (2)$$

$$D = 0.5 R_0 \rho V^2 S_{\text{ref}} C_D / m_0 \quad (3)$$

式中: $\rho = \rho_0 e^{-\beta h}$ 为大气密度, 其中 $\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $\beta = 1/h_s$, $h_s = 7110 \text{ m}$, $h = (r-1)R_0$ 为高度; S_{ref} 为气动系数参考面积; C_L 和 C_D 分别为升力系数和阻力系数; T 为发动机推力, 其无量纲化参数为 $m_0 g_0$; Ω 为地球自转角速度, 其无量纲化参数为 $\sqrt{g_0/R_0}$; α 和 σ 分别为攻角和倾侧角; 比冲 I_{sp} 和时间 τ 的无量纲化参数为 $\sqrt{R_0/g_0}$ 。

飞行器再入过程中, 状态变量和控制变量需要满足以下过程约束

$$\dot{Q} = k_Q \sqrt{\rho} (V \sqrt{g_0 R_0})^{3.15} \leq \dot{Q}_{\max} \quad (4)$$

$$q = 0.5 \rho g_0 R_0 V^2 \leq q_{\max} \quad (5)$$

$$n = \sqrt{(D - T \cos \alpha)^2 + (L + T \sin \alpha)^2} \leq n_{\max} \quad (6)$$

式中: \dot{Q} 为驻点热流密度; $k_Q = 9.4369 \times 10^{-5}$; q 为动压; n 为过载; \dot{Q}_{\max} , q_{\max} 和 n_{\max} 分别为峰值热流、峰值动压和峰值过载。

飞行器的控制变量为攻角、倾侧角和发动机推力, 在轨迹优化中, 对其幅值进行约束

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max} \quad (7)$$

$$\sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max} \quad (8)$$

$$T_{\min} \leq T \leq T_{\max} \quad (9)$$

定义状态矢量 $\mathbf{x} = [r, \theta, \phi, V, \gamma, \psi, m]^T$, 则初始和终端的状态约束表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\tau_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(\tau_f) = \mathbf{x}_f \end{cases} \quad (10)$$

式中: \mathbf{x}_0 和 \mathbf{x}_f 根据具体任务要求确定。

1.2 新控制量的选择

带动力飞行器再入过程的控制变量为攻角、倾侧角和发动机推力。攻角、倾侧角以三角函数形式与推力相乘而显含于运动学方程中, 同时攻角又隐含于气动力中, 使运动学方程关于控制量高度非线性, 增加了问题凸化的难度; 并且在动力学方程中, 控制量的变化会导致状态量出现“抖振”现象, 使迭代过程难以收敛^[8-9]。针对上述问题, 本文考虑倾侧角为常值的再入轨迹优化问题, 令 $\sigma = 0$, 定义与原始控制量相关联的新控制量如下

$$\begin{cases} u_1 \triangleq \frac{T \cos \alpha}{m} \\ u_2 \triangleq \frac{T \sin \alpha}{m} \\ u_3 \triangleq \frac{T}{m} \end{cases} \quad (11)$$

定义新的控制量后, 关于质量的微分方程变为: $\dot{m} = -m u_3 / I_{sp}$, 该方程是非线性的, 定义新的状

态量

$$z \triangleq \ln m \quad (12)$$

对应的微分方程为

$$\dot{z} = -u_3 / I_{sp} \quad (13)$$

得到新的状态矢量 $\mathbf{x} = [r, \theta, \phi, V, \gamma, \psi, z]^T$, 控制矢量 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$, 则式(1)可表示为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{f}_\Omega(\mathbf{x}) \quad (14)$$

式中:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} V \sin \gamma \\ \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r \cos \phi} \\ \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{r} \\ -D e^{-z} - \frac{\sin \gamma}{r^2} \\ \frac{L}{V} e^{-z} + (V - \frac{1}{rV}) \frac{\cos \gamma}{r} \\ \frac{V}{r} \cos \gamma \sin \psi \tan \phi \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{V} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{I_{sp}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$\mathbf{f}_\Omega(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^7$ 为动力学方程中地球自转相关项; $\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ 关于控制量是线性的; $\mathbf{f}_\Omega(\mathbf{x})$ 为小量; $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 中含有与原控制量攻角相关的气动力项, 其对问题求解的影响通过数值仿真进行分析。

将原控制量的约束施加于新控制量

$$u_1 \tan \alpha_{\min} \leq u_2 \leq u_1 \tan \alpha_{\max} \quad (16)$$

$$T_{\min} e^{-z} \leq u_3 \leq T_{\max} e^{-z} \quad (17)$$

由于3个新控制量不独立, 还需要引入等式约束

$$u_1^2 + u_2^2 = u_3^2 \quad (18)$$

1.3 轨迹优化问题

以减小再入过程总加热量和增大末端速度为目标确定性能指标, 将再入轨迹优化问题记为 P0

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{P0: } \min J = c_1 \int_{\tau_0}^{\tau_f} \dot{Q} d\tau - c_2 V_f \\ \text{s. t.} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{f}_\Omega(\mathbf{x}) \\ u_1 \tan \alpha_{\min} \leq u_2 \leq u_1 \tan \alpha_{\max} \\ T_{\min} e^{-z} \leq u_3 \leq T_{\max} e^{-z} \\ u_1^2 + u_2^2 = u_3^2 \\ \dot{Q} \leq \dot{Q}_{\max}, q \leq q_{\max}, n \leq n_{\max} \\ \mathbf{x}(\tau_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(\tau_f) = \mathbf{x}_f \end{array} \right. \quad (19)$$

式中: c_1 和 c_2 分别为总加热量、末端速度的权重系数。

问题 P0 中的性能指标和动力学方程与其他约束条件不完全是凸的或线性的,为达到凸优化方法应用的条件,还需要采用线性化等方法对其进行凸化与离散,将原轨迹优化问题转化为离散的参数优化问题。

2 序列凸优化方法

2.1 松弛与线性化

对非线性的性能指标、动力学约束、过程约束与控制量约束等进行凸化主要采用松弛与线性化的方法。

1) 动力学约束

对动力学方程线性化处理,将式(14)关于参考轨迹 $\mathbf{x}^{(k)} = [r^{(k)}, \theta^{(k)}, \phi^{(k)}, V^{(k)}, \gamma^{(k)}, \psi^{(k)}, z^{(k)}]^T$ 进行一阶泰勒展开

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{u} + \mathbf{b}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (20)$$

式中:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 & a_{47} \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 & a_{57} \\ a_{61} & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{cases} a_{21} = -\frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r^2 \cos \phi} \\ a_{31} = -\frac{V \cos \gamma \cos \psi}{r^2} \\ a_{41} = -D_r e^{-z} + \frac{2 \sin \gamma}{r^3} \\ a_{51} = \frac{L_r e^{-z}}{V} - \frac{V \cos \gamma}{r^2} + \frac{2 \cos \gamma}{V r^3} \\ a_{61} = -\frac{V \cos \gamma \sin \psi \tan \phi}{r^2} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} a_{23} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi \sin \phi}{r \cos^2 \phi} \\ a_{63} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r \cos^2 \phi} \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} a_{14} = \sin \gamma \\ a_{24} = \frac{\cos \gamma \sin \psi}{r \cos \phi} \\ a_{34} = \frac{\cos \gamma \cos \psi}{r} \\ a_{44} = -D_V e^{-z} \\ a_{54} = \frac{L_V V - L}{V^2} e^{-z} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2 V^2} \right) \cos \gamma \\ a_{64} = \frac{\cos \gamma \sin \psi \tan \phi}{r} \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} a_{15} = V \cos \gamma \\ a_{25} = -\frac{V \sin \gamma \sin \psi}{r \cos \phi} \\ a_{35} = -\frac{V \sin \gamma \cos \psi}{r} \\ a_{45} = -\frac{\cos \gamma}{r^2} \\ a_{55} = \frac{1 - r V^2}{r^2 V} \sin \gamma \\ a_{65} = -\frac{V \sin \gamma \sin \psi \tan \phi}{r} \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} a_{26} = \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi} \\ a_{36} = -\frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r} \\ a_{66} = \frac{V \cos \gamma \cos \psi \tan \phi}{r} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} a_{47} = D e^{-z} \\ a_{57} = -\frac{L}{V} e^{-z} \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} L_r = \frac{\partial L}{\partial r} = -\beta R_0 L, L_V = \frac{\partial L}{\partial V} = \frac{2L}{V} \\ D_r = \frac{\partial D}{\partial r} = -\beta R_0 D, D_V = \frac{\partial D}{\partial V} = \frac{2D}{V} \end{cases} \quad (28)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{f}_\Omega(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (29)$$

由于 \mathbf{f}_Ω 为小量,不对其进行线性化处理。为保证动力学方程线性化的有效性,需要对状态变量施加信赖域约束

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \delta \quad (30)$$

式中: $\delta \in \mathbb{R}^7$ 为常值,不等式对每一个分量都成立。

2) 过程约束

对过程约束式(4)~(6)进行线性化处理

$$\dot{\mathbf{Q}}(r, V) = \dot{\mathbf{Q}}(r^{(k)}, V^{(k)}) + \dot{\mathbf{Q}}'(r^{(k)}, V^{(k)}) \cdot [r - r^{(k)} \quad V - V^{(k)}]^T \quad (31)$$

$$q(r, V) = q(r^{(k)}, V^{(k)}) + \mathbf{q}'(r^{(k)}, V^{(k)}) \cdot [r - r^{(k)} \quad V - V^{(k)}]^T \quad (32)$$

$$n(r, V, z, u_1, u_2) = n(r^{(k)}, V^{(k)}, z^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}) + \mathbf{n}'(r^{(k)}, V^{(k)}, z^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}) \cdot [r - r^{(k)} \quad V - V^{(k)} \quad z - z^{(k)} \quad u_1 - u_1^{(k)} \quad u_2 - u_2^{(k)}]^T \quad (33)$$

式中: \dot{Q} , \mathbf{q}' 和 \mathbf{n}' 为偏导数向量。

$$\dot{Q} = k_Q \sqrt{g_0 R_0}^{-3.15} V^{2.15} [0.5 \rho^{-0.5} \rho_r V \quad 3.15 \sqrt{\rho}] \quad (34)$$

$$\mathbf{q}' = g_0 R_0 V [0.5 \rho_r V \quad \rho] \quad (35)$$

$$\mathbf{n}' = n^{-1} \begin{bmatrix} D_r(D - u_1 e^z) + L_r(L + u_2 e^z) \\ D_V(D - u_1 e^z) + L_V(L + u_2 e^z) \\ -u_1 e^z(D - u_1 e^z) + u_2 e^z(L + u_2 e^z) \\ -e^z(D - u_1 e^z) \\ e^z(L + u_2 e^z) \end{bmatrix}^T \quad (36)$$

式中: $\rho_r = \frac{d\rho}{dr} = -\beta R_0 \rho$ 。

3) 控制量约束

对控制量约束式(17)进行线性化:

$$T_{\min} e^{-z^{(k)}} (1 - z + z^{(k)}) \leq u_3 \leq T_{\max} e^{-z^{(k)}} (1 - z + z^{(k)}) \quad (37)$$

控制量约束式(18)限制控制量的可行域为圆锥表面,这是一个非凸集合。通过松弛处理,将等式约束改为不等式约束,使其变为凸集^[11],得到二阶锥约束如下

$$u_1^2 + u_2^2 \leq u_3^2 \quad (38)$$

这种松弛方法可以保留原始约束的非线性,加快算法的收敛速度,文献[8]对其合理性进行了证明。

4) 性能指标

对约束式(18)进行松弛处理后,还需要在性能指标中附加关于速度方位角的积分项以保证松弛的合理性^[8,11],得到性能指标函数如下

$$\min J = c_1 \int_{\tau_0}^{\tau_f} \dot{Q} d\tau - c_2 V_f + c_3 \int_{\tau_0}^{\tau_f} \psi d\tau \quad (39)$$

式中: c_3 为速度方位角积分项的权重系数; \dot{Q} 采用线性化后的式(31),因此式(39)的性能指标函数是凸的。

通过以上凸化处理,问题 P0 变为具有线性目标函数、线性或二阶锥约束的优化问题,记为问题 P1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{P1: } \min J = c_1 \int_{\tau_0}^{\tau_f} \dot{Q} d\tau - c_2 V_f + c_3 \int_{\tau_0}^{\tau_f} \psi d\tau \\ \text{s. t.} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{u} + \mathbf{b}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \delta \\ u_1 \tan \alpha_{\min} \leq u_2 \leq u_1 \tan \alpha_{\max} \\ u_3 \geq T_{\min} e^{-z^{(k)}} (1 - z + z^{(k)}) \\ u_3 \leq T_{\max} e^{-z^{(k)}} (1 - z + z^{(k)}) \\ u_1^2 + u_2^2 \leq u_3^2 \\ \dot{Q} \leq \dot{Q}_{\max}, q \leq q_{\max}, n \leq n_{\max} \\ \mathbf{x}(\tau_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(\tau_f) = \mathbf{x}_f \end{array} \right. \quad (40)$$

2.2 离散

将连续的时间等分为 N 段,得到 $N + 1$ 个离散的时间点,间隔为 $\Delta\tau = (\tau_f - \tau_0)/N$ 。离散点上的状态量为 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$, 控制量为 $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ 。

采用梯形法则对动力学方程式(20)进行离散

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \frac{\Delta\tau}{2} [(\mathbf{A}_{i-1}^{(k)} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{B}_{i-1}^{(k)} \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{b}_{i-1}^{(k)}) + (\mathbf{A}_i^{(k)} \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i^{(k)} \mathbf{u}_i + \mathbf{b}_i^{(k)})], \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (41)$$

式中: $\mathbf{A}_i^{(k)} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_i^{(k)}); \mathbf{B}_i^{(k)} = \mathbf{B}(\mathbf{x}_i^{(k)}); \mathbf{b}_i^{(k)} = \mathbf{b}(\mathbf{x}_i^{(k)})$ 。

将式(41)整理为

$$\mathbf{H}_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{G}_{i-1} \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{G}_i \mathbf{u}_i = -\frac{\Delta\tau}{2} (\mathbf{b}_{i-1}^{(k)} + \mathbf{b}_i^{(k)}) \quad (42)$$

式中:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_{i-1} = \mathbf{I} + \frac{\Delta\tau}{2} \mathbf{A}_{i-1}^{(k)}, \mathbf{H}_i = \mathbf{I} - \frac{\Delta\tau}{2} \mathbf{A}_i^{(k)} \\ \mathbf{G}_{i-1} = \frac{\Delta\tau}{2} \mathbf{B}_{i-1}^{(k)}, \mathbf{G}_i = \frac{\Delta\tau}{2} \mathbf{B}_i^{(k)} \end{array} \right. \quad (43)$$

式中: \mathbf{I} 为单位矩阵。由于式(42)对 $i = 1, 2, \dots, N$ 都成立,将状态量与控制量合并为优化变量 $\mathbf{z} = [\mathbf{x}_0^T, \dots, \mathbf{x}_N^T, \mathbf{u}_0^T, \dots, \mathbf{u}_N^T]^T$, 满足线性方程组

$$\mathbf{M} \mathbf{z} = \mathbf{F} \quad (44)$$

式中:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_1 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}_{N-1} & \mathbf{H}_N & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_{N-1} & \mathbf{G}_N \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\Delta\tau}{2} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\Delta\tau} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{b}_0^{(k)} + \mathbf{b}_1^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{N-1}^{(k)} + \mathbf{b}_N^{(k)} \end{bmatrix} \quad (46)$$

式(40)中的约束转化为各个离散点上的约束,性能指标表示为 \mathbf{z} 的线性函数 $\mathbf{c}^T \mathbf{z}$,其中 \mathbf{c} 为系数向量。最终得到二阶锥规划问题 P2

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{P2: } \min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{z} \\ \text{s. t.} \\ \mathbf{Mz} = \mathbf{F} \\ \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^{(k)}\| \leq \delta \\ u_{1,i} \tan \alpha_{\min} \leq u_{2,i} \leq u_{1,i} \tan \alpha_{\max} \\ u_{3,i} \geq T_{\min} e^{-z_i^{(k)}} (1 - z_i + z_i^{(k)}) \\ u_{3,i} \leq T_{\max} e^{-z_i^{(k)}} (1 - z_i + z_i^{(k)}) \\ u_{1,i}^2 + u_{2,i}^2 \leq u_{3,i}^2 \\ \dot{Q}_i \leq \dot{Q}_{\max}, q_i \leq q_{\max}, n_i \leq n_{\max} \end{array} \right. \quad (47)$$

式中: $i = 0, 1, \dots, N$ 。

2.3 迭代算法

进行轨迹优化需要给出初始参考轨迹,由于参考轨迹可能与最优轨迹相差较大,而信赖域约束要求线性化必须在参考轨迹附近进行,因此需要采用连续线性化方法,迭代求解最优轨迹。

迭代求解原始轨迹规划问题 P0 的步骤如下:

1) 令 $k = 0$,给出初始参考轨迹 $\mathbf{x}^{(k)}$ 及初始参考控制量 $\mathbf{u}^{(k)}$ 。

2) 根据 $\mathbf{x}^{(k)}$ 和 $\mathbf{u}^{(k)}$ 计算动力学约束矩阵 \mathbf{M} 、 \mathbf{F} 及过程约束、控制量约束等,求解凸优化问题 P2,得到问题 P2 的最优解 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 和 $\mathbf{u}^{(k+1)}$ 。

3) 判断如下收敛条件是否满足

$$\max_i \|\mathbf{x}_i^{(k+1)} - \mathbf{x}_i^{(k)}\| \leq \epsilon \quad (48)$$

式中: $\epsilon \in \mathbb{R}^7$ 为收敛半径。若上述条件满足,转到步骤 4;若不满足,令 $k = k + 1$,用 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 和 $\mathbf{u}^{(k+1)}$ 代替 $\mathbf{x}^{(k)}$ 和 $\mathbf{u}^{(k)}$,转到步骤 2。

4) 问题 P0 的解为 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 和 $\mathbf{u}^{(k+1)}$,求解完成。

求解完成后,得到所有离散点的状态量、控制量最优解序列,其中原始控制量还需反解。在第 i 个离散点,推力和攻角反解为

$$T_i = u_{3,i} e^{z_i} \quad (49)$$

$$\alpha_i = \arctan \frac{u_{2,i}}{u_{1,i}} \quad (50)$$

3 数值仿真

为验证本文方法的可行性,基于 CAV-H 飞行器进行仿真分析,其主要参数为^[13]:总质量为 907.2 kg,飞行器参考面积 0.48 m²。飞行器初始状态参数为:

高度 60 km,速度 6400 m/s,经度、纬度、速度倾角和速度方位角分别为 0°、0°、0°和 30°。

采用固定推力和攻角生成初始轨迹 $\mathbf{x}^{(k)}$ 。仿真中离散点数目设置为 300,发动机比冲为 300 s,末端高度 $h_f = 45$ km,质量 $m_f \geq 847.2$ kg,信赖域约束为 $\delta = \left[\frac{20000}{R_0}, \frac{20\pi}{180}, \frac{20\pi}{180}, \frac{2000}{\sqrt{g_0 R_0}}, \frac{20\pi}{180}, \frac{30\pi}{180}, \ln(1.1) \right]^T$,序列迭代算法的最大迭代次数为 20 次,收敛半径为 $\epsilon = \left[\frac{200}{R_0}, \frac{0.5\pi}{180}, \frac{0.5\pi}{180}, \frac{50}{\sqrt{g_0 R_0}}, \frac{0.5\pi}{180}, \frac{\pi}{180}, \ln(1.01) \right]^T$ 。

图 1 给出了迭代过程的高度-速度剖面图,其中 $k = 0$ 表示初始轨迹。由结果可知第 3 次和第 4 次的迭代结果已经基本重合,达到收敛条件;迭代过程末端高度满足约束,末速度越来越大。图 2 给出了热流密度的变化情况,可以看出随着迭代次数的增加,峰值热流在逐步减小。

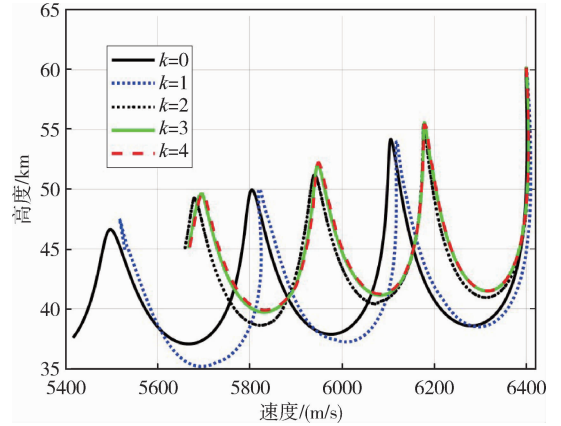


图 1 高度-速度剖面迭代过程

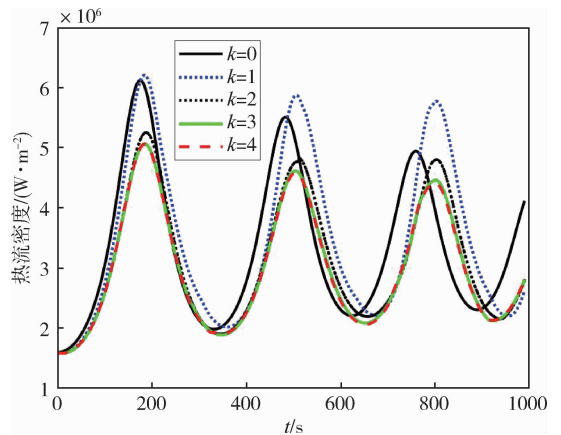


图 2 热流密度迭代过程

图 3~4 给出了采用本文算法优化出的再入轨迹以及数值积分的验证结果。其中,优化结果由

300个离散点的值组成,积分结果通过对离散点控制量插值代入式(1)进行数值积分得到。验证结果表明,采用凸优化求解和直接对原始非线性动力学方程进行数值积分得到的状态量曲线基本重合,即结果仍满足式(1)的非线性动力学方程,说明应用凸优化方法求解该问题是可行的。

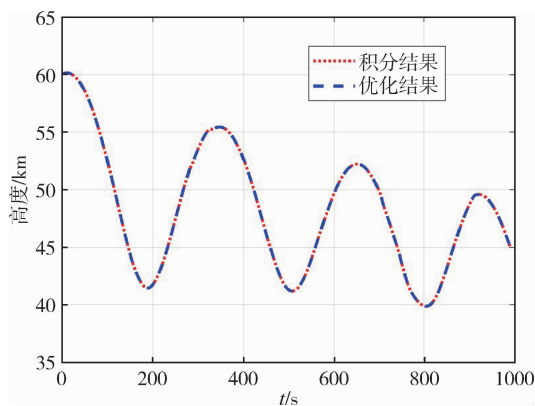


图3 高度变化对比

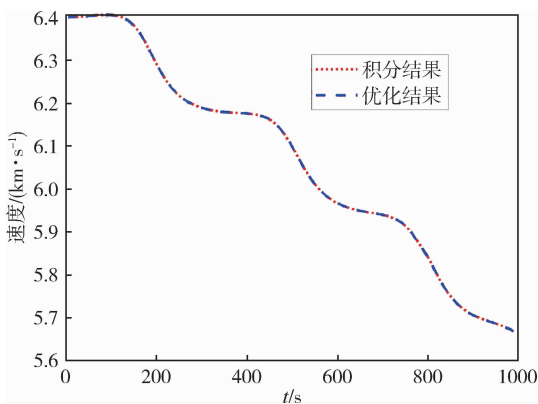


图4 速度变化对比

表1对优化结果与积分结果得到的终端状态参数进行了对比,可以看出优化解相对于积分解的误差是比较小的,证明了凸优化方法对原始问题的近似有较高的精度,因此优化解可以作为原始问题的可行解。

表1 终端参数对比

状态参数	优化解	积分解	误差
h/km	45.01	45.12	-0.11
$\theta/(\text{°})$	35.13	35.01	0.12
$\phi/(\text{°})$	43.51	43.46	0.05
$V/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	5669.2	5667.4	1.8
$\gamma/(\text{°})$	-0.95	-0.93	-0.02
$\psi/(\text{°})$	47.91	47.66	0.25

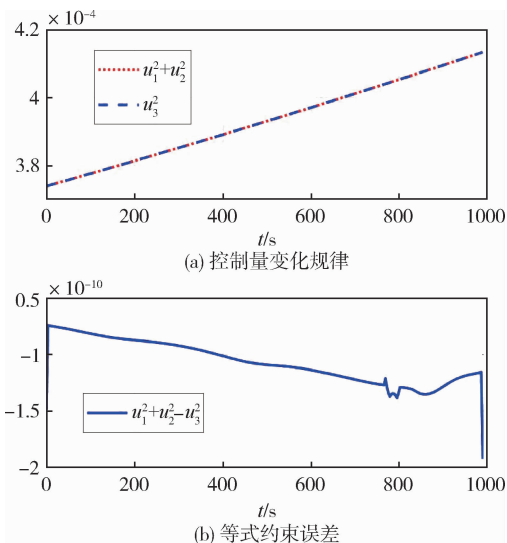


图5 控制量等式约束满足情况

图5给出了式(18)中等式约束的满足情况。由于式(38)对原等式约束做了松弛处理,将其转化为不等式约束,因此优化得到的控制量 u_1 、 u_2 和 u_3 有可能不满足原等式约束,这样的控制量是不可行的。而由图5可以看出, $u_1^2 + u_2^2$ 与 u_3^2 的变化曲线基本重合,二者相差最大不超过 2×10^{-10} ,因此等式约束在一定精度要求下是满足的,积分解的验证结果图3~4及终端参数对比结果表1也验证了优化解控制量的可行性。

4 结论

本文给出了基于序列凸优化进行带动力飞行器再入轨迹优化的方法。通过对原始问题的性能指标、动力学约束、过程约束以及控制量约束进行松弛、线性化和离散处理,将原始问题近似为一个凸优化问题,通过序列凸化对原始问题进行迭代求解,并通过数值积分对优化解进行验证。仿真结果表明,本文提出的带动力再入轨迹优化方法是可行的,松弛和线性化处理原始的非线性动力学约束及控制量约束仍然满足,优化结果具有较高的精度,可作为原始问题的可行解。

参考文献

- [1] 蔺君,何英姿,黄盘兴.带推力高超声速飞行器非连续点火再入轨迹研究[J].兵工学报,2020,41(7):1307-1316. (LIN Jun, HE Yingzi, HUANG Panxing. Research on reentry trajectory of powered hypersonic ve-

- hicle with discontinuous ignition [J]. *Acta Armamentarii*, 2020, 41(7): 1307-1316.)
- [2] 柴琨琦, 张刊刊, 王健, 等. 跳跃滑翔弹道补能策略研究[J]. *战术导弹技术*, 2020(3): 23-29. (CHAI Kunqi, ZHANG Kankan, WANG Jian, et al. Analysis of energy supply strategy for hypersonic skip glide trajectory [J]. *Tactical Missile Technology*, 2020 (3): 23-29.)
- [3] 施健峰, 李伶, 吕建强. 基于混沌粒子群算法的跳跃-滑翔轨迹优化[J]. *航天控制*, 2017, 35(4): 20-25. (SHI Jianfeng, LI Ling, LYU Jianqiang. Skip-glide trajectory optimization based on chaotic particle swarm optimization algorithm [J]. *Aerospace Control*, 2017, 35(4): 20-25.)
- [4] 宋满金, 郭杰, 李竞元, 等. 补能滑翔飞行器参数/轨迹综合优化设计[J]. *飞行力学*, 2023, 41(4): 59-66. (SONG Manjin, GUO Jie, LI Jingyuan, et al. Comprehensive optimization design of parameters and trajectory for complement glide vehicle [J]. *Flight Dynamics*, 2023, 41(4): 59-66.)
- [5] 罗云皓, 徐聪, 赵爱红, 等. 一种火箭动力助飞高超声速飞行器轨迹优化设计方法[J]. *力学与实践*, 2022, 44(6): 1303-1312. (LUO Yunhao, XU Cong, ZHAO Aihong, et al. A method of trajectory optimization design for rocket-powered hypersonic vehicle [J]. *Mechanics in Engineering*, 2022, 44(6): 1303-1312.)
- [6] DONG C J, YANG H W, LI S, et al. Convex optimization of asteroid landing trajectories driven by solar radiation pressure [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2022, 35(12): 200-211.
- [7] DANYLO M, YUE Y, PURNANAND E, et al. Advances in trajectory optimization for space vehicle control [J]. *Annual Reviews in Control*, 2021, 52: 282-315.
- [8] LIU X F. Fuel-optimal rocket landing with aerodynamic controls [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2019, 42(1): 65-77.
- [9] 周祥, 张洪波, 何睿智, 等. 基于凸优化的再入轨迹三维剖面规划方法[J]. *航空学报*, 2020, 41(11): 66-82. (ZHOU Xiang, ZHANG Hongbo, HE Ruizhi, et al. Entry trajectory planning method based on 3D profile via convex optimization [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2020, 41(11): 66-82.)
- [10] 宋瑞, 朱勇, 徐广通, 等. 基于序列凸优化的高超声速飞行器协同再入轨迹规划[J]. *战术导弹技术*, 2020(6): 7-16. (SONG Rui, ZHU Yong, XU Guangtong, et al. Cooperative reentry trajectory planning of hypersonic vehicle based on sequential convex programming [J]. *Tactical Missile Technology*, 2020 (6): 7-16.)
- [11] LIU X F, SHEN Z J, LU P. Entry trajectory optimization by second-order cone programming [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, 39(2): 227-241.
- [12] BAE J, LEE S D, KIM Y W, et al. Convex optimization-based entry guidance for spaceplane [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2022, 20(5): 1652-1670.
- [13] PHILLIPS T H. A common aero vehicle (CAV) model, description and employment guidance [R]. New York, USA, Schafer Corporation for AFRL and AFSPC, January 2003.